時間とエネルギーの不確定性関係とアインシュタインの光子箱

森田邦久

序論

不確定性関係の存在は、古典力学と大きく異なる量子力学の特徴である。では、不確定性関係にはどのような意味があるのだろうか。たとえば、「位置と運動量の不確定性関係 Space-Momentum Uncertainty Relation」（以下、SMUR）といったとき、これは

> 粒子の運動量のある成分を正確に指定することは、その時刻における粒子の対応する成分についてのすべての知識を断念することなしには不可能である。あるいはまた粒子の位置をある方向で正確に局所的に限定してしまうことは、その方向の運動量成分についてのすべての知識を断念することなしには不可能である。（シッフ、1970［1968］、9 頁）

という意味だとされる。ところが、SMUR とならんで量子力学の教科書によく出てくる「時間とエネルギーの不確定性関係 Time-Energy Uncertainty Relation」（以下、TEUR）は、上記の意味とは異なる。たとえば、先も引用したシッフの教科書では、

> ある正確度 ΔE でエネルギーを決めるには少なくとも $\hbar/\Delta E$ 程度の時間間隔を必要とする。（同上、9 頁）

となっている。

なぜこれら 2 つの不確定性関係の意味が異なるのか、というのはまた後で論じるが、いま簡単に理由を述べると、「時間」は、仮に測定機器の誤差が 0 であれば不確定さ（分散）なく測定することができるからだ（上の引用でも時間の正確さについては言及がない）。一方で、位置や運動量は、たとえ誤差のない理想的な測定機器であっても、$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$ だけの分散があるのである。

TEUR の導出方法はいくつかある。そして、TEUR の意味はただ 1 つではなく、その導出方法について異なるのである。本論考では、いくつもある TEUR の導出方法について整理し、その

それぞれについてどのような解釈が与えられるかについて考察する。

だが、その前に、この序論では、SMUR についてもう少しくわしく考えてみよう。ハイゼンベルグ（1978［1927］）が、ガンマ線顕微鏡の思考実験により SMUR を導いたのが、量子力学史に現れるはじめての不確定性関係である。

ただし、これは、位置の測定誤差と運動量の測定誤差との不確定性関係である。この意味での不確定性関係は、位置と運動量のあいだだけでなく、たがいに非可換な物理量どうしのあいだにも成り立つ。ここで、2 つの異なる物理量 $\hat{A}$、$\hat{B}$ の積をとるとき、その順序が異なれば結果も異なるならば、すなわち、

$$\hat{A}\cdot\hat{B}-\hat{B}\cdot\hat{A}\neq 0 \tag{0-1}$$

ならば、$\hat{A}$ と $\hat{B}$ は非可換である（交換しない）と言う。A、B の上についているハット（＾）はその物理量がエルミート演算子という形式で表現できることを示す。

ハイゼンベルグの導いた不確定性関係を、もう少し一般化したうえでよりくわしく説明すると、次のようになる。いま、誤差のある測定器で、ある物理量 A と、A と交換しない物理量 B を同時に測定したとする。このとき、A にたいする測定誤差 ΔA、その測定による B にたいする測定の反作用の大きさ ΔB あいだに成り立つ関係が、この意味での不確定性関係である。

ところが、じつは非可換な物理量のあいだに成り立つ不確定性関係には次のような意味もある。（同じ量子状態の系をいくつも用意して）誤差のない測定器で A と B を多数回、べつべつに測定した場合の関係である[1]。それゆえ、ゼロ点振動のような量子的な揺らぎと関係するのは、こちらの不確定性関係である。

ファインマン（1979［1965］、27-8 頁）は、彼が書いた教科書で不確定性関係を用いて水素原子のおおよその大きさを見積もっているが、ここでいう不確定性関係もこちらの不確定性関係のことである。ファインマンの教科書ではそこが曖昧になっている。また、冒頭のシッフの教科書からの引用では、どちらともとれるような書き方になっている。

これら、非可換な物理量どうしのあいだに成り立つ不確定性関係に 2 つの異なる意味があるのは、導出方法にもおおきく 2 通りがあるからである。ハイゼンベルグが導いた意味での不確定性関係の導出は、量子測定理論という理論を用いて導き出されるべきもので、意外と難しく、いまでも議論が盛んである。もう一方の不確定性関係は、学部生レベルの量子力学の講義ででも学ぶ簡単なものである。

さて、時間は、じつはエルミート演算子によって表現できないことがわかっているので、時間とエネルギーのあいだには非可換という関係もない。それゆえ、あきらかに TEUR は、ここまで議論した非可換な物理量どうしのあいだに成り立つ不確定性関係とは異なるのである。このことについて明記してある教科書は意外と少ない。また、明記されていても、「導出方法とその意味」をきちんと関連づけて論じていない。

そこで、本論考では、（1）TEUR の導出方法について整理し、そのそれぞれについてどのよう

1　ハイゼンベルグの導いた不確定性関係では、A と B を同時に測定していた。

な解釈が与えられるかについて考察する。考えられる解釈として、

（a）励起状態にとどまる時間 Δt と自然幅 ΔE の関係。

（b）測定時間 Δt と測定されたエネルギー値のばらつき ΔE の関係。

（c）波束の時間幅 Δt と波束のエネルギーの不確定さ ΔE の関係。

の 3 つがある。

次に、(2)有名なアインシュタインの光子箱の思考実験にたいしてなされたボーアの反論（ボーア、1999［1949］）および、後にトレーダー（Treder、1971［1970］）によってなされた反論の妥当性について(1)で得られた考察をもとに論じる。

1．時間とエネルギーの不確定性関係の解釈について

a．励起状態にとどまる時間 Δt と自然幅 ΔE の関係

系の初期状態を $|\alpha>$ であるとする。これがハミルトニアン H の固有状態であるならば時間変化はしないが、固有状態でない場合、初期状態は時間とともに崩壊する。$|\alpha>$ が時刻 t の後に、$|\alpha'>$ になるとする。2 つの状態の「類似度」を

$$C(t) = <\alpha'|\alpha> \tag{1-1}$$

とする。$|\alpha>$ が H の固有状態 $|\alpha'>$ の重ねあわせで表わせるとき、

$$C(t) = <\alpha'|\alpha> = \sum_{a'} c_{a'}^{*} < a'| \left[\sum_{a''} c_{a''} \exp\left(\frac{-iE_{a''}t}{\hbar} \right) | a''> \right]$$

$$= \sum_{a'} |c_{a'}|^2 \exp\left(\frac{-iE_{a'}t}{\hbar} \right) \tag{1-2}$$

となる。いま、エネルギースペクトルが準連続的であり、和を以下のように積分に直せるとしよう。

$$\sum_{a'} \to \int dE \rho(E)、 c_{a'} \to g(E)\Big|_{E=E_{a'}} \tag{1-3}$$

ここで $\rho(E)$ は状態密度である。すると、

$$C(t) = \int dE |g(E)|^2 \rho(E) \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar} \right) \tag{1-4}$$

となる。いま、$|g(E)|^2 \rho(E)$ が $E = E_0$ のまわりで幅の ΔE ピークをもっているとしよう。すると上式を、

$$C(t) = \exp\left(\frac{-iE_0 t}{\hbar} \right) \int dE |g(E)|^2 \rho(E) \exp\left(\frac{-i(E - E_0)t}{\hbar} \right) \tag{1-5}$$

と書けば、$C(t)$ の絶対値は、

$$t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \tag{1-6}$$

で、1 からおおきくずれる。つまり、系が初期の状態を保つ時間間隔 Δt と ΔE には、

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \tag{1-7}$$

の関係がある。

たとえば、ΔE だけの広がりのある放射性物質の寿命は $\hbar/\Delta E$ であることがこの不確定性関係からわかる（清水、2003、194-5 頁）。この不確定関係はいくつかの量子力学の教科書に書かれているが、必ずしも、導出方法とリンクされているわけではない。また、以下で論じるように、TEUR には他にもいくつかの解釈がある。

ｂ．測定時間 Δt と測定されたエネルギー値のばらつき ΔE の関係

$t = 0$ で摂動がかけられたとする。このとき、時刻 t で初期状態 i が n に遷移する確率は、

$$p \propto \frac{\sin^2\left[\pi(E_n - E_i)t/\hbar\right]}{(E_n - E_i)} \tag{1-8}$$

となる。それゆえ、遷移幅 $E_n - E_i = \Delta E$ とすると、

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \tag{1-9}$$

の関係がある。これはどう解釈できるだろうか。

ランダウとパイエルスは、摂動として、測定装置と測定される系の相互作用を考え、測定時間が t であれば、ΔE だけの不確定性があると解釈した（ヤンマー、1983［1974］、166 頁）。

ハイゼンベルグ（1978［1927］）は、シュテルン－ゲルラッハの実験を分析することによって時間とエネルギーの不確定性関係を主張したが、これはこの意味での不確定性関係だと理解できるだろう。

ｃ．波束の時間幅 Δt と波束のエネルギーの不確定さ ΔE の関係

時間 t と角振動数 ω はフーリエ変換で結び付けられている。たとえば、時間軸上で波束が局在していればしているほど、その波束はさまざまな角振動数をもつ波によって構成されている。逆も真である。この時間軸上での波束の幅 Δt とそれをフーリエ変換した波の幅 $\Delta\omega$ のあいだには、$\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1$ の関係がある。ここまでは古典論である。量子力学によると、$E = \hbar\omega$ の関係があるから、

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \tag{1-10}$$

となる。

だが、ここで時間軸上に描いた波束の幅 Δt はなにを意味しているのだろうか。空間座標では、波（波動関数）の広がりは、その波動関数であらわされる量子を観察したとき、その広がりのなかのどこか一点で見出されるということであった。では、時間座標上の波束の広がりはどのように解釈できるのだろうか。

たとえばこれが音波だとすると、音が聞こえ始めてから聞こえ終えるまでに Δt かかるということである。それゆえ、短い音は振動数が明確であるが、長い音は振動数が不明確である。たとえば、ピアノは音程（振動数）が明確であるが、打楽器は音程が不安定であるのはそのせいであ

る。以上は古典論である。古典論では、ひとつの波束がさまざまな振動数のもつ多くの波の重ねあわせにより成り立っているということには問題がないだろう。

しかし、量子力学の場合、（波と粒子の二重性があるので）1 個あたりの量子の波束というのを考えることができる。1 個あたりの量子がいくつもの振動数（エネルギー）をもつ波の重ねあわせであるというのはどういうことだろうか。これは波束の時間幅 Δt が狭ければ狭いほど、エネルギーの不確定さ ΔE が増すと解釈できる。

さて､いま､波束の群速度を c とすると､幅 Δx の波束がある 1 点を通過するには､$\Delta t = c/\Delta x$ だけかかる。これは言い換えると、幅 Δx の波束をつくろうと思えば、シャッターつきの穴が開いた箱のなかに連続的な量子（たとえば光）の発生装置（光の場合は電球でよい）を用意し、箱の穴から生成された波が出てくるようにして、$\Delta t = c/\Delta x$ だけシャッターを開ければよい。この波束の運動量は $\Delta p = \hbar/\Delta x$ だけの不確定さをもっている。それゆえ､エネルギーの不確定さは､

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial p}\Delta p = c\Delta p \qquad (1\text{-}11)$$

である。$c = \Delta x/\Delta t$ であったから、

$$\Delta E = \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta p \qquad (1\text{-}12)$$

となり、$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$ の関係を用いて、

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \qquad (1\text{-}13)$$

となる。これは上述の意味での TEUR とおなじ意味、すなわち、Δt の幅をもった波束は ΔE の不確定さをもつと解釈できるだろう。

２．時間とエネルギーの不確定性関係とアインシュタインの光子箱

アインシュタインによる有名な光子箱の思考実験は、(c) の意味での TEUR を利用したといえる。アインシュタインの光子箱の思考実験とは次のようなものである（ヤンマー､1983［1974］、154-6 頁）。理想的な反射壁をもち、輻射で満たされた箱を用意する。箱は、そのなかに封じ込められた時計仕掛けによって操作されるシャッターを備えている。そして、光子が 1 個分だけ出てくる時間 Δt だけシャッターを開ける。すると、不確定性関係から、この光子のエネルギーは測定前は $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$ だけの不確定性があるはずである。この場合、箱から出てくる光子 1 個分の波束は Δt の幅をもっているから、(1-13) より、この波束は ΔE の不確定性をもっているわけである。

ところが、この箱をばねばかりにぶら下げておくと、光子放出前後の質量の差と、相対性理論からの帰結である $E = mc^2$ から正確にこの光子のエネルギーが（測定前に）予測できる。それゆえ、量子力学はまちがっている、とアインシュタインは主張したのである。しかし、ボーアはアインシュタインが作り上げた一般相対性理論を用いてこの批判をかわした。

一般相対性理論によると、重力ポテンシャルが $\Delta\varphi$ だけ変化すると、時間間隔は

$$\Delta t = t\frac{\Delta\varphi}{c^2} \tag{2-1}$$

だけ変化する。いま、ばねの伸びの変化が Δx の精度で測れるとする。すると、SMUR から箱の運動量変化は $\Delta p = \hbar / \Delta x$ だけの精度で測れる。箱がつりあうのに t だけかかるとすると、このあいだに質量 Δm の物質に与えられる力積は Δp より大きい。それゆえ、

$$\Delta p \approx \hbar / \Delta x < tg\Delta m \tag{2-2}$$

となる。これと、先の一般相対性理論による公式（2-1）をあわせて、重さを測る手続きを終えた後の時計についてのわれわれの知識は、

$$\Delta t > \frac{\hbar}{c^2 \Delta m} \tag{2-3}$$

となる。これと $E = mc^2$ から、

$$\Delta E \cdot \Delta t > \hbar \tag{2-4}$$

が得られる。「したがって、光子のエネルギーを正確に測定する手段としてこの装置を使用すれば、その光子の出てゆく時刻の制御ができなくなるのである」（ボーア、1999［1949］、250 頁）

　だが、このボーアの反論に対する重大な批判がトレーダー（Treder、1971［1970］）によってなされる。すなわち、光子箱の思考実験は、重力を静磁場に、光子を電子に換えても成り立つ。それゆえ、重力理論である一般相対性理論を用いた反論は有効でないというのだ。そして、彼は自分流の光子箱への反論を提出する。

　光子放出前は箱とばねを合わせた系は平衡状態にある。いま Δm の光子が箱から放出されたとする。すると、平衡状態は破れ、ばねは Δq の振幅で振動を始めるが、振動をしているあいだは箱の位置は確定できない。すなわち、エネルギーを正確に測ることができない。この振動に関するニュートンの運動方程式は、

$$\alpha \Delta q = g \cdot \Delta m \tag{2-5}$$

である。この振動のエネルギーはやがて周囲に熱として散逸される。この散逸エネルギー ΔE は振動過程の平均寿命 Δt に逆比例する。すなわち、

$$\Delta E \approx \hbar / \Delta t \tag{2-6}$$

となる。エネルギーが散逸した後の箱の位置は明確にわかる。すなわち、エネルギーが確定できる。だが、この「箱＋ばね」の系をいくつも用意して同様の測定をしたときには、この測定値にはばらつきがある。その分散は、（2-5）と（2-6）より、

$$\alpha \Delta q = \Delta E \cdot \frac{g}{c^2} = \frac{g\hbar}{c^2 \Delta t} \tag{2-7}$$

となるので、結局、

$$\Delta t \cdot \Delta E = \hbar \tag{2-8}$$

という不確定性関係が成り立つ。

　だが、（2-8）における Δt はすでに上に示したように、平衡に達するのに要する時間である。ところが、もとの光子箱の思考実験では、Δt はシャッターを開けている時間であった。それゆえ、

トレーダーが論じている不確定性関係はアインシュタインの論じている不確定性関係とは別のものなのだ。同様に、ボーアの議論においても、Δt は、シャッターを開けている時間間隔が $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$ で誤差を生じるということであるから、もとのアインシュタインの思考実験に現れた Δt と意味が違ってきている。

ただ、トレーダーの議論の見るべき点は、ΔE をエネルギーの分散と見た点である。すなわち、「箱＋ばね」系をいくつも用意して、同様の測定をしたときにエネルギーの測定値にばらつきが出るということである。じっさい、もとの思考実験における不確定性関係、すなわち（c）の意味の不確定性関係における ΔE はそういう意味である。

われわれが、アインシュタインの思考実験を検討しようとすれば、その点について注意深くならなければならないのである。

３．まとめ

時間とエネルギーの不確定性関係（TEUR）にはすくなくとも 3 つの解釈がありうることを見た[2]。ところが、TEUR をめぐる議論は、このようにさまざまな解釈がありうることを無視して行なわれることによって、しばしば混乱を引き起こす。その 1 つの好例が本稿で検討したアインシュタインの光子箱の思考実験である。

この思考実験による量子力学への攻撃は、従来、一般相対性理論を使用したボーアの反論によって華麗に回避されたかのように論じられてきた。ところが、この思考実験と本質的に同じ議論が、静磁場中にある箱から電子を放出させる思考実験によっても可能であることから、一般相対性理論に頼ることによっては回避できないことがトレーダーによって示された。そして、トレーダーは自己流の回避法を提案するのだが、それは本文で検討したように、かれの論じた Δt はもとの思考実験で考えられた Δt とは異なるものであるがゆえに、やはり有効なものではない。

以上のように、時間とエネルギーの不確定性関係があらわれる議論においては、その不確定性関係がどういう意味で用いられているのか、について慎重にならなければならない。

参考文献

シッフ、L. I.（1970［1968］）『量子力学』、井上健訳、吉岡書房。

清水明（2003）『新版 量子論の基礎』、サイエンス社。

ハイゼンベルグ、W.（1978［1927］）「量子論的な運動学および力学の直観的内容について」川辺六男訳、『現代の科学Ⅱ』所収、中央公論社。

ファインマン、R. P.（1979［1965］）『ファインマン物理学Ｖ量子力学』、砂川重信訳、岩波書店。

ボーア、N.（1999［1949］）「 原子物理学における認識論上の諸問題をめぐるアインシュタインとの討論 」、山本義隆訳、『因果性と相補性』所収、岩波書店。

ヤンマー、M.（1983［1974］）『量子力学の哲学』、井上健訳、東京：紀伊國屋書店。M. Jammer,

[2] じつは、メシアの教科書（Messiah 1999［1958], pp. 319-20）で論じられているもう 1 つの解釈があるのだが、本稿では省略した。

The Philosophy of Quantum Mechanics, 1974, John Wiley & Sons.

Busch, P. (2007) Time in Quantum Mechanics, Springer

Messiah, A. (1999[1958]) *Quantum Mechanics,* Dover Book.

Treder, H. J. (1971[1970]) The Einstein-Bohr Box Experiment, *Perspective in Quantum Theory,* W. Yourgrau and A. van der Merwe (eds.), MIT Press, pp. 17-24; originally published in 1970.

（もりたくにひさ　早稲田大学高等研究所）

Time-Energy Uncertainty Relation and Einstein's Photon Box

Kunihisa MORITA

In this paper, time-energy uncertainty relation (TEUR) and the *Gedankenexperiment*, "Einstein's photon box" are discussed. There are, at least, three different meanings of TEUR, corresponding to three ways of their derivations. However, many textbook of quantum mechanics neglect it; most of them show only one meaning, and discuss meaning of TEUR without considering how to derive it.

(1) I associate three meanings of TEUR with three ways of their derivation: (a) relation between duration time of stay in the excited state Δt and natural width ΔE, (b) relation between measuring time Δt and dispersion of energy ΔE, and (c) relation between time-width of wave packet Δt and uncertainty of energy ΔE.

In addition, (2) I criticize two rebuttals against Einstein's photon box, made by Bohr and Treder. Einstein suggests the Gedankenexperiment in order to prove the invalidity of quantum mechanics. He insists that we can exactly measure both time and energy, using $E = mc^2$, at the same time. Bohr answers to Einstein that we cannot exactly measure time of opening the shutter because of Einstein's general theory of relativity. On the other hand, Treder points out that ΔE is not uncertainty of measurement, but dispersion of energy. I clarify that both of them misunderstand the original meaning of TEUR appeared in the Einstein's photon box. Δt is not uncertainty of time of opening shutter neither time taken to equilibrium, but opening time of the shutter.

「キーワード」
量子力学、時間とエネルギーの不確定性関係、アインシュタインの光子箱